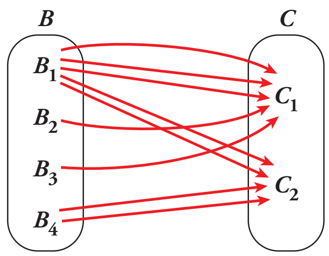
Resuelve

Página 33

Vuelos internacionales

■ **Aquí tienes ahora, representados mediante flechas, los vuelos que permiten viajar el martes desde el país *B* anterior hasta otro país *C*:**



Representa, mediante una tabla similar a la anteriormente descrita, la información recogida en el diagrama de vuelos entre los países *B* y *C*.

	B_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

1 Nomenclatura. Definiciones

Página 35

1 Escribe las matrices traspuestas de:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

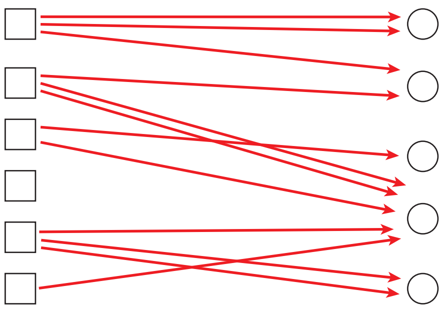
$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3 Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Operaciones con matrices

Página 36

1 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 39

2 Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3 Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada $A\,(3 \times 3)$, la deje igual.

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Propiedades de las operaciones con matrices

Página 40

1 Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$a = 3,\ b = 6 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD 2:

$$9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$9A = 3A + 6A$

PROPIEDAD 3:

$$3(A+B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$$3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$3(A + B) = 3A + 3B$

Página 41

2 Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

4 Matrices cuadradas

Página 43

1 Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices en el supuesto de que la tengan:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) - (2.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) - 3 \cdot (1.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) + (2.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) - (2.^{\text{a}}) \\ (-1/2) \cdot (2.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) + 2 \cdot (1.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 2.ª fila está compuesta por ceros.

Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

2 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) - 4 \cdot (1.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) - 7 \cdot (1.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) - 2 \cdot (2.^{\text{a}}) \end{array}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 3.ª fila está compuesta por ceros.

Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) - (1.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) - 3 \cdot (3.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) - 2 \cdot (3.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) \end{array}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{\text{a}}) - 2 \cdot (2.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} - 2 \cdot \text{(1.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} + 2 \cdot \text{(2.ª)} \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ -5 \cdot \text{(2.ª)} + \text{(3.ª)} \\ -(1/10) \cdot \text{(3.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} - 3 \cdot \text{(3.ª)} \\ -(1/5) \cdot \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} - \text{(2.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$$

Así, $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

Página 45

3 **Para las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

a) $$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

c) $$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

4 **Sean** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Encuentra X **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$.

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

5 **Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2×2 que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6 **Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

7 **Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla la siguiente condición:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x + y \\ z & z + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z & y + t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x + z \\ x + y &= y + t \\ z &= z \\ z + t &= t \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= t \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

8 **Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$ **b)** $(A - B) \cdot C$ **c)** $A \cdot B \cdot C$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

9 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, comprueba que** $(A - I)^2 = 0$**.**

$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10 **Halla la inversa de estas matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x+3z & 7y+3t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 7x+3z=1 \\ 2x+\ \ z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ z=-2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y+3t=0 \\ 2y+\ \ t=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-3 \\ t=7 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x-2z & 3y-2t \\ -8x+5z & -8y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} 3x-2z=1 \\ -8x+5z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-5 \\ z=-8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3y-2t=0 \\ -8y+5t=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-2 \\ t=-3 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ 2d = 0,\ 2e = 1,\ 2f = 0,\ g = 0,\ h = 0,\ i = 1$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} a+2d+3g=1 \\ d+2g=0 \\ d+\ \ g=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ d=0 \\ g=0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} b+2e+3h=0 \\ e+2h=1 \\ e+\ \ h=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=-1 \\ e=-1 \\ h=1 \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} c+2f+3i=0 \\ f+2i=0 \\ f+\ \ i=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=-1 \\ f=2 \\ g=-1 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

b) $Y \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$.

La ecuación es $AX + B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$.

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + 8 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-1 \cdot (1.^a) + 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)/(-3) \\ (2.^a)/(-1)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) La ecuación es, siendo A, B y C las mismas matrices del apartado anterior:

$YA + B = C \Rightarrow Y = (C - B)A^{-1}$

$$Y = \left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 & -27 \\ 184 & 71 \end{pmatrix}$$

c) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La ecuación es $AZ - B = C \Rightarrow Z = A^{-1}(C + B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (3.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)/(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 6 & 13 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 \\ 2 & -7 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

5 Complementos teóricos para el estudio de matrices

Página 46

1 Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}$.

Comprueba las ocho propiedades que se enumeran arriba.

- *Asociativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Conmutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nulo*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector opuesto*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Asociativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = (8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producto por 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Página 48

Comprueba si los siguientes conjuntos de n-uplas son L.I. o L. D.

2 (3, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 2, 1, 4)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 0, 0) + y(0, 2, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(3, 2, 1, 4) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x + \quad\quad\quad 3t &= 0 \\ 2y + \quad\; 2t &= 0 \\ z + \; t &= 0 \\ 4t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sus soluciones son: } x = 0,\; y = 0,\; z = 0,\; t = 0$$

Por tanto, los vectores son L.I., pues la única combinación lineal de ellos que da lugar al vector cero es la que se obtiene con coeficientes todos nulos.

3 **(3, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 2, 1, 0)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 0, 0) + y(0, 2, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(3, 2, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x + \quad\quad\quad 3t &= 0 \\ 2y + \quad 2t &= 0 \\ z + \quad t &= 0 \end{array}\right\} \text{ sus soluciones son: } x = -\lambda,\; y = -\lambda,\; z = \lambda,\; t = \lambda$$

Como hay soluciones distintas de la solución trivial, los vectores son L.D.

4 **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(2x + y,\; -4x + z,\; 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y \quad\quad &= 0 \\ -4x + \quad\quad z &= 0 \\ 7x + 2y + 2z &= 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5 **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

- Aplicamos la propiedad fundamental:

  $$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

  Si hacemos $x = 0$, $y = 0$, z puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

- Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

  $$x_1 \vec{u}_1 = x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_{n-1} \vec{u}_{n-1} + x_n \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

  en la que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

6 Rango de una matriz

Página 50

1 Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - 4 \cdot (2.^a) \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(D) = 3$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 51

1. Matrices traspuestas

Hazlo tú. Comprueba que: $(A+B)^t\,C^t = A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t=\left[\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}5&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}5&1\\-2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$C^t=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t\,C^t=\begin{pmatrix}5&1\\-2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-5&3\\-3&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&9\\-4&2&0\\3&-1&3\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}4&-2\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4&-6\\1&0&3\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot C^t+B^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}5&-1&9\\-4&2&0\\3&-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&-4&-6\\1&0&3\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-5&3\\-3&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$$

Hemos obtenido el mismo resultado, luego la igualdad es cierta.

2. Cálculo de los elementos de una matriz

Hazlo tú. Dada la matriz $X=\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}$, calcula a para que $X^2-X=\begin{pmatrix}12&-1\\0&20\end{pmatrix}$.

$$X^2-X=\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(a-1)&-1\\0&a(a+1)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a(a-1)&-1\\0&a(a+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-1\\0&20\end{pmatrix}\to\left.\begin{matrix}a(a-1)=12\\a(a+1)=20\end{matrix}\right\}\to a=4$$

3. Operaciones con matrices

Hazlo tú. Halla los valores de a para los cuales $X=\begin{pmatrix}a&0\\0&2\end{pmatrix}$ verifica la ecuación $X^2-3X+2I=0$.

$$X^2=\begin{pmatrix}a&0\\0&2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

$$X^2-3X+2I=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}a&0\\0&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-3a+2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a^2-3a+2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\to a^2-3a+2=0\to a_1=2,\;\; a_2=1$$

Página 52

5. Matrices conmutables

Hazlo tú. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtén todas las matrices B que conmutan con ella.

La matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha de verificar $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} a+2c=a \\ b+2d=2a+b \\ c=c \\ d=2c+d \end{array}\right\}$$

De la 1.ª ecuación y de la 4.ª ecuación obtenemos $c = 0$.

De la 2.ª ecuación obtenemos $a = d$.

Por tanto, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Página 53

6. Matriz inversa de sí misma

Hazlo tú. Prueba que si $A^2 = A + I$, entonces A es invertible (invertible es sinónimo de regular).

$A^2 = A + I$

$A^2 - A = I \to A(A - I) = I \to A - I$ es la inversa de A, luego A es invertible.

7. Ecuación con matrices

Hazlo tú. Halla la matriz X que cumple $AXA = 2BA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En la ecuación $AXA = 2BA$ multiplicamos en los dos miembros por A^{-1} a la izquierda y a la derecha:

$AXA = 2BA \to X = A^{-1} \cdot 2BA \cdot A^{-1} \to X = 2A^{-1}BI = 2A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Página 54

9. Despejar una matriz multiplicando por las inversas de otras dos

Hazlo tú. Halla la matriz X que verifica $AXB = A + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicamos en los dos miembros de la ecuación $AXB = A + B$ por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha:

$$AXB = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \rightarrow X = B^{-1} + A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

10. Ecuación matricial: sacar factor común

Hazlo tú. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica:

$$\boldsymbol{AX - A = B - C}$$

$AX - A = B - C \rightarrow A(X - I) = B - C$

Multiplicamos en los dos miembros por A^{-1} a la izquierda:

$X - I = A^{-1}(B - C) \rightarrow X = I + A^{-1}(B - C)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Página 55

11. Potencia de una matriz

Hazlo tú. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}; \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

12. Rango de una matriz

Hazlo tú. Estudia el rango de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

según los distintos valores de m.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - m \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)/(1-m) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - m \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2-2m \end{pmatrix}$$

Si $m = -1 \rightarrow ran(M) = 2$ porque las dos primeras filas son L.I. y la tercera es una fila de ceros.

Si $m \neq -1 \rightarrow ran(M) = 3$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 56

1. Matriz inversa igual a traspuesta

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$***, calcular los valores de*** a ***y*** b ***para que la matriz inversa de*** A ***coincida con su traspuesta.***

$A^{-1} = A^t \to AA^{-1} = AA^t \to I = AA^t$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ b^2+1 = 1 \end{array}\right\} a = \pm 1,\ b = 0$$

2. Ecuación con matrices

Calcular x, y, z ***tales que:***

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+1 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} y^2+1 = 5 \\ x+yz = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{array}\right\} \to y = \pm 2$$

- Si $y = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{array}\right\} \to x = 2,\ z = -1;\ x = -2,\ z = 1$$

- Si $y = -2$:

$$\left.\begin{array}{r} x-2z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{array}\right\} \to x = -2,\ z = -1;\ x = 2,\ z = 1$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 2,\ z_1 = -1$

$x_2 = -2,\ y_2 = 2,\ z_2 = 1$

$x_3 = -2,\ y_3 = -2,\ z_3 = -1$

$x_4 = 2,\ y_4 = -2,\ z_4 = 1$

3. Ecuación matricial

Determinar la matriz X que verifique $AXA - B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y 0 la matriz nula de orden 2.

$AXA - B = 0 \;\to\; AXA = B \;\to\; X = A^{-1} B A^{-1}$

Hallamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)/3 \\ -(2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Rango de una matriz

Estudiar el rango de la matriz M según los valores del parámetro t.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 1 \\ 0 & 6-3t & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es L.D. de las otras dos, luego el rango no es 3.

Las dos primeras filas son L.I., independientemente del valor de t, luego $ran(M) = 2$ para cualquier valor de t.

5. Ecuación con infinitas soluciones

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $XAX{-}1 = B$.

$XAX^{-1} = B \;\to\; XA = BX$

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} \\[2ex] BX = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Igualando obtenemos un sistema de ecuaciones.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2x = 6a - 7c \\ -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2c = 6a - 7c \end{array}\right\} \to c = \dfrac{2}{3} a \\[2ex] \left.\begin{array}{l} -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array}\right\} \to b = d \end{array}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ (2/3)\,a & b \end{pmatrix}$

De todas las posibles soluciones, podemos tomar $a = 3$ y $b = 1$, y obtenemos $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 57

Para practicar

Operaciones con matrices. Matriz inversa

1 Efectúa, si es posible, las siguientes operaciones:

$$\boldsymbol{A \cdot B \qquad B \cdot D \qquad 3B - 2C \qquad B \cdot C \qquad D \cdot D^t}$$

siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A_{(3 \times 2)} \cdot B_{(2 \times 4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(2 \times 4)} \cdot D_{(4 \times 1)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3B - 2C = 3\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B_{(2 \times 4)} \cdot C_{(2 \times 4)} \rightarrow$ No se pueden multiplicar.

$$D_{(4 \times 1)} \cdot D^t_{(1 \times 4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 & 10 \\ -15 & 9 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $\boldsymbol{A \cdot B}$ **b)** $\boldsymbol{B \cdot A}$ **c)** $\boldsymbol{B^{-1}}$ **d)** $\boldsymbol{(A + B)(A - B)}$

e) $\boldsymbol{A^2 - B^2}$ **f)** $\boldsymbol{(A + B)^2}$ **g)** $\boldsymbol{A^2 + B^2 + 2AB}$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a) + (1/2) \cdot (2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)]{(1.^a)}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1/2) \cdot (2.^a)]{1/2 \cdot (1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $(A+B)(A-B) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$

f) $(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$

g) $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$

3 **Dada la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A+I)^2 = \mathbf{0}$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.**

$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $\quad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$(A+I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A+I)\cdot(A+I) = \mathrm{A}^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow A^2 = -2A - I$

4 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, averigua cuál de las siguientes matrices es su inversa:**

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. M no es inversa de A.

$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. N es la inversa de A.

5 **Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\quad |B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$; $\quad |C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6 **a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

b) Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)\,(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I$$

Como $(I + A + A^2)\cdot(I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

7 a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3.

b) Utiliza la igualdad anterior para calcular A^4.

a)

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

b) Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

8 Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to A^3 = -I$$

Por tanto:

$A^4 = -I \cdot A = -A$

$A^5 = -A \cdot A = -A^2$

$A^6 = -A^2 \cdot A = -A^3 = I$

$A^7 = A$

$A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot (-I) = -A$

Página 58

Rango de una matriz

9 **Estudia el rango de las matrices siguientes:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 12 \cdot (1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (3.^a) - 9 \cdot (2.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(F) = 3$$

10 **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow ran(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

11 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro m:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

- $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & m-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

  Si $m \neq -1 \rightarrow ran(A) = 3$

  Si $m = -1 \rightarrow ran(A) = 2$

- $B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 6 & m^2-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 0 & m^2-m-6 \end{pmatrix}$

  $m^2 - m - 6 = 0 \rightarrow m = 3, \ m = -2$

  Si $m \neq 3$ y $m \neq -2 \rightarrow ran(B) = 3$

  Si $m = 3$, la matriz transformada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 2$

  Si $m = -2$, la matriz transformada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 2$

- $C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})-2\cdot(1.^{a})\end{array}} \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 0 & -m-3 \end{pmatrix}$

  Si $m = 0$, obtenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

  Si $m = -1$, obtenemos $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 2$

  Si $m = -3$, obtenemos $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

  En cualquier otro caso, $ran(C) = 2$.

  Es decir: si $m = 0$ o $m = -3$, $ran(C) = 1$ y si $m \neq 0$ o $m \neq -3$, $ran(C) = 2$.

- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a})+2\cdot(1.^{a})\end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$

  La tercera fila nunca es una fila de ceros.

  Si $m \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

  Si $m = 0 \rightarrow ran(D) = 2$

- $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^{a})\\2\cdot(2.^{a})-(1.^{a})\end{array}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2m-1 & -2m+1 \end{pmatrix}$

  Si $m \neq \dfrac{1}{2} \rightarrow ran(E) = 2$

  Si $m = \dfrac{1}{2} \rightarrow ran(E) = 1$

- $F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a})+(1/m)\cdot(2.^{a})\end{array}}$

  Si $m \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m-\dfrac{1}{m} \end{pmatrix}$

  Miramos las filas.

  Si $m = 2 \rightarrow ran(F) = 2$

  $m - \dfrac{1}{m} = 0 \rightarrow m = -1,\ m = 1$

  Si $m = 1 \rightarrow ran(F) = 2$

  Si $m = -1 \rightarrow ran(F) = 2$

  Si $m = 0$, obtenemos $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(F) = 3$

  Si $m \neq 2$, $m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow ran(F) = 3$

Ecuaciones con matrices

12 **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

13 **Resuelve el siguiente sistema dado en forma matricial:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando:

$4x = -5 \rightarrow x = \dfrac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-7}{4}$

Solución: $x = \dfrac{-5}{4}$; $y = \dfrac{-7}{4}$

14 **Halla dos matrices A y B tales que:**

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix}$$ Multiplicamos por 2 la 2.ª ecuación.

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix}$$ Sumamos miembro a miembro.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ Multiplicamos por $\dfrac{1}{13}$.

Despejamos A en la 2.ª ecuación:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

15 **Dadas las matrices** $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, **halla dos matrices** X **e** Y **que verifiquen estas condiciones:**

$$X - 2M = 3N$$

$$M + N - Y = I$$

$$X = 3N + 2M = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

16 **Calcula una matriz** X **que conmute con la matriz** A, **esto es,** $A \cdot X = X \cdot A$, **siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = X \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=\ c+d \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to c=\ 0 \\ \to a=d \\ \to c=0 \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

17 **Considera las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula B^{-1} **por el método de Gauss.**

b) Halla X **tal que** $BX - A = C^t$.

c) Determina la dimensión de una matriz M **para poder calcular** AMC.

d) ¿Cuál debe ser la dimensión de N **para que** C^tN **sea una matriz cuadrada?**

a) $B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)-(2.^a)\\(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)/2\\(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $BX - A = C^t \to BX = C^t + A \to X = B^{-1}(C^t + A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A_{(2 \times 3)} M_{(m \times n)} C_{(3 \times 2)}$

M debe tener dimensión 3×3.

d) $C^t{}_{(2 \times 3)} N_{(m \times n)} = M_{(2 \times 2)}$

N debe tener dimensión 3×2.

18 **Sea la siguiente ecuación matricial $AX - B + C = 0$, donde**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^{-1} aplicando la definición. **b) Resuelve la ecuación.**

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a+c=1 \\ 4b+d=0 \\ -a=0 \\ -b=1 \end{array}\right\} \to a=0,\; b=-1,\; c=1,\; d=4 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $AX - B + C = \mathbf{0} \to AX = B - C \to X = A^{-1}(B - C)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

19 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Calcula A^{-1}.

b) Halla la matriz X que verifique $AX + 2A = I$.

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $AX + 2A = I \to AX = I - 2A \to X = A^{-1}(I - 2A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

20 **Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.**

a) Despeja la matriz X en la ecuación $XA - B = XC$. **b) Calcula X.**

a) $XA - B = XC \to XA - XC = B \to X(A - C) = B \to X = B(A - C)^{-1}$

b) $$X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)/(-2) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

21 **Dadas las matrices** $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}$**:**

a) Calcula las matrices X **e** Y **que verifiquen** $2X-Y=A$ **y** $X-3Y=B$.

b) Halla la matriz Z **tal que** $B+ZA-B^t=3I$ **donde** I **es la matriz unidad de orden 2.**

a) $\begin{cases}2X-\ \ Y=A\\ X-3Y=B\end{cases} \to \begin{cases}2X-Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\\ X-3Y=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}\end{cases} \xrightarrow[-2\cdot(2.^a)]{(1.^a)} \begin{cases}2X-Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\\ -2X+6Y=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 18 & -10\end{pmatrix}\end{cases}$

Sumamos:

$$5Y=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 18 & -10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix} \to 5Y=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 15 & -5\end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 5\\ 15 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la segunda ecuación:

$$X=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}+3Y=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Las matrices solución son $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

b) Despejamos Z de la ecuación:

$ZA=3I+B^t-B$

Se podrá despejar Z si A se puede invertir.

$det(A)=1 \to$ existe A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$Z=\left[\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -9\\ -4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 34 & 21\end{pmatrix}$$

22 **Sea la matriz** $A=\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & y\end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2.

b) Determina x **e** y **para que** $A^2=\begin{pmatrix}x+1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

a) $A^2=\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-1 & -x-y\\ x+y & y^2-1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}x^2-1 & -x-y\\ x+y & y^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r}x^2-1=x+1\\ -x-y=-2\\ x+y=2\\ y^2-1=-1\end{array}\right\} \to y=0,\ x=2$

Para resolver

23 **Dadas las matrices** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ **y** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**:**

a) ¿Para qué valores de m existe B^{-1}? Para $m = 1$, calcula B^{-1}.

b) Para $m = 1$ halla la matriz X tal que $X \cdot B + C = D$.

a) Calculamos la inversa de B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Podemos conseguir I a la izquierda solo si $m \neq 0$, luego existe B^{-1} si $m \neq 0$.

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)/m \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/m & 1/m \end{array}\right)$$

Calculamos B^{-1} para $m = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot B + C = D \to X \cdot B = D - C \to X = (D - C)B^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

24 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ **e** I **(matriz unidad de orden 3):**

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - I)$.

b) Justifica que la matriz A es invertible.

c) Comprueba que no existe la matriz inversa de $A - I$.

d) Determina el valor del parámetro real λ para que se verifique $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$.

a) $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) En el apartado anterior hemos visto que:

$A - I = A(A - I) \to A - I = A^2 - A \to -A^2 + 2A = I \to A(-A + 2I) = I$

Por lo tanto, A es invertible y su inversa es $(-A + 2I)$.

c) Llamamos $B = A - I$.

$B^2 = \mathbf{0}$

Si B fuera invertible, $B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \cdot B^{-1} = \mathbf{0}$

Además, cualquier matriz cumple que $B^2 \cdot B^{-1} = B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot I = B$

Tendríamos entonces que $\left.\begin{array}{l} B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \\ B^2 \cdot B^{-1} = B \end{array}\right\} \to B = \mathbf{0}$, lo cual es falso.

Por tanto, $B = A - I$ no es invertible.

d) Según el resultado del apartado b), $A^{-1} = -(A - 2I)$.

Por tanto, $\lambda = -1$.

25 **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, halla la matriz** $\boldsymbol{X}$ **tal que** $\boldsymbol{XA + A^t = 2I}$**.**

$XA + A^t = 2I \to XA = 2I - A^t \to X = (2I - A^t)A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 59

26 **Calcula** $\boldsymbol{A^n}$ **y** $\boldsymbol{B^n}$ **siendo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1/7} & \mathbf{1/7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

27 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

28 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to k = 1$

29 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \to ran(M) = 3$ para cualquier valor de k

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ 2\cdot(3.^a)-(1.^a)}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1+2k=0 \text{ si } k=-\frac{1}{2}$$

- Si $k = -\frac{1}{2} \rightarrow ran(N) = 2$
- Si $k \neq -\frac{1}{2} \rightarrow ran(N) = 3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (3.^a):4 \\ (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = -2 \rightarrow ran(P) = 1$
- Si $k \neq -2 \rightarrow ran(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(1.^a)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 2 \rightarrow ran(Q) = 2$
- Si $k \neq 2 \rightarrow ran(Q) = 3$

30 **Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} A \cdot X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{aligned} a+c &= a \\ b+d &= a+b \\ d &= c+d \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} c &= 0 \\ d &= a \\ c &= 0 \end{aligned}\right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

31 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina la matriz X que verifica $AXA = 2BA$.**

$AXA = 2BA \rightarrow X = A^{-1}(2BA)A^{-1} \rightarrow X = 2A^{-1}B$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 2\cdot(2.^a)-3\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a) \\ (2.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)/2 \\ (-1)\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$$

32 **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} c=b \\ c=a \\ 7c=7c \\ 7c=7c \end{array}\right\} a=b=c$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

33 **Una matriz cuadrada se llama ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25+x^2 & (3/5)y-(3/5)x & 0 \\ (3/5)y-(3/5)x & y^2+9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{9}{25}+x^2=1\\ \frac{3}{5}y-\frac{3}{5}x=0\\ y^2+\frac{9}{25}=1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x^2=\frac{16}{25}\\ y=x\\ y^2=\frac{16}{25}\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x=\pm\frac{4}{5}\\ y=x\end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\frac{4}{5},\ y_1=\frac{4}{5};\ x_2=-\frac{4}{5},\ y_2=-\frac{4}{5}$

34 **Halla todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación matricial $X^2=2X$.**

$$X^2=2X \to \begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}^2=2\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a^2&0\\b(a+c)&c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&0\\2b&2c\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l}a^2=2a\\ b(a+c)=2b\\ c^2=2c\end{array}\right\}$ En función de las soluciones de este sistema, obtenemos distintas matrices X solución:

$a=0,\ c=2 \to X=\begin{pmatrix}0&0\\b&2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $a=2,\ c=0 \to X=\begin{pmatrix}2&0\\b&0\end{pmatrix}$

$a=0,\ c=0,\ b=0 \to X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $a=2,\ c=2,\ b=0 \to X=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

35 **Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica la siguiente relación: $XC+A=C+A^2$**

$$XC+A=C+A^2 \to X=(C+A^2-A)C^{-1}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=A \to A^2-A=\mathbf{0}$$

$$X=(C+A^2-A)C^{-1}=CC^{-1}=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

36 **Halla la matriz X que verifica $AX+B=3X$, siendo $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.**

$$AX+B=3X \to AX-3X=-B \to (A-3I)X=-B \to X=(A-3I)^{-1}(-B)$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\1&-3\end{pmatrix}$$

Calculamos $(A-3I)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-3&-1&1&0\\1&-3&0&1\end{array}\right)\ \begin{array}{l}(1.^a)\\3\cdot(2.^a)+(1.^a)\end{array} \triangleright \left(\begin{array}{cc|cc}-3&-1&1&0\\0&-10&1&3\end{array}\right)\ \begin{array}{l}10\cdot(1.^a)-(2.^a)\\(2.^a)\end{array} \triangleright$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-30&0&9&-3\\0&-10&1&3\end{array}\right)\ \begin{array}{l}(1.^a)/(-30)\\(2.^a)/(-10)\end{array} \triangleright \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-3/10&1/10\\0&1&-1/10&-3/10\end{array}\right) \to (A-3I)^{-1}=\begin{pmatrix}-3/10&1/10\\-1/10&-3/10\end{pmatrix}$$

$$X=(A-3I)^{-1}(-B)=\begin{pmatrix}-3/10&1/10\\-1/10&-3/10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/5\\1&7/5\end{pmatrix}$$

37 a) Despeja la matriz X en la siguiente igualdad: $AXA + B = B(2A + I)$

b) Calcula la matriz X en el caso de que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $AXA + B = B(2A + I) \rightarrow AXA = B \cdot 2A + B - B = 2BA \rightarrow$

$\rightarrow AX = 2BAA^{-1} = 2B \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B = 2A^{-1}B$

b) Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

38 Una empresa conservera elabora tres tipos de latas de cangrejo L_1, L_2 y L_3. Para ello necesita hojalata, cangrejo, aceite y sal. Dos almacenes se encargan de distribuir el producto a las tiendas. Considera las siguientes matrices:

A: Demanda de los almacenes

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix}$$

B: Cantidad de material en gramos por lata

$$B = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix}$$

El coste, en euros, de cada gramo de material es 0,01 la hojalata; 0,05 el cangrejo; 0,04 el aceite y 0,001 la sal.

a) Escribe la matriz de costes C, de forma que puedas multiplicarla por la matriz de materiales.

b) Calcula e interpreta AB, BC y ABC.

a) $C = \begin{array}{c} \text{Hoj.} \\ \text{Can.} \\ \text{Ac.} \\ \text{Sal} \end{array} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\,750 & 19\,000 & 34\,250 & 5\,500 \\ 46\,300 & 20\,100 & 36\,000 & 5\,950 \end{pmatrix}$

La matriz que hemos obtenido, AB, expresa, por filas, la cantidad, en gramos, de cada uno de los materiales necesarios para fabricar todas las latas que demandan los almacenes.

$$BC = \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,41 \\ 7,115 \\ 6,06 \end{pmatrix}$$

La matriz BC representa el coste de los materiales utilizados en una unidad de cada tipo de lata L_1, L_2, L_3.

$$ABC = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,773 \\ 2\,913,95 \end{pmatrix}$$

Este último producto de matrices, ABC, nos indica el coste, en materiales de fabricación, de todas las latas que demanda cada uno de los dos almacenes.

39 **En un edificio residencial hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 ventanas grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{c c} & \begin{matrix} P & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} L3 \\ L4 \\ L5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{c c} & \begin{matrix} C & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c c} & \begin{matrix} P & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} L3 \\ L4 \\ L5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{c c} & \begin{matrix} C & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} C & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} L3 \\ L4 \\ L5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

Página 60

40 **La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:**

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C. ¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamamos D a la matriz que indica las cantidades que queremos tomar de cada vitamina:

$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Llamamos X a las cantidades que debemos tomar de cada alimento:

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} P & Q & R & S \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \end{array}$$

Llamamos M a la matriz que indica la cantidad de vitaminas por producto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto XM indica la cantidad de vitaminas que hemos tomado, luego $XM = D$.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y+2z+t & 2x+z+t & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + z + t = 25 \\ 2y + t = 6 \end{array}\right\} \; x = 11 - \frac{1}{2}\lambda, \; y = 3 - \frac{1}{2}\lambda, \; z = 3, \; t = \lambda$$

Es un sistema compatible indeterminado, luego sí es posible hacerlo y hay infinitas formas de conseguirlo.

b) Si hacemos $y = \lambda$, obtenemos: $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 3$, $t = 6 - 2\lambda$.

Como las cantidades no pueden ser negativas, ha de ser $0 \le \lambda \le 3$.

41 **a) Comprueba que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?**

b) Utiliza el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = 2A - I \to A^2 - 2A = -I \to -A^2 + 2A = I \to A(-A + 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y $A^{-1} = -A + 2I$.

b) Comprobamos que $A^2 = 2A - I$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Puesto que $A^2 = 2A - I$, por el apartado anterior, A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = -A + 2I = -\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

42 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X que verifique la ecuación $XA + A = A^{-1}$.**

$XA + A = A^{-1} \to XA = A^{-1} - A \to X = (A^{-1} - A)A^{-1} = (A^{-1})^2 - I$

De otra forma:

$(X + I)A = A^{-1} \to (X + I) = (A^{-1})^2 \to X = (A^{-1})^2 - I$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = (A^{-1})^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuestiones teóricas

43 **Justifica por qué no es cierta la igualdad:**

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

44 **Sea A una matriz de dimensión 2×3.**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso.

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$.

45 **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

46 **¿Es posible encontrar una matriz A no nula tal que A^2 sea la matriz nula?**

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

47 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

* ***Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.***

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

48 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$,

que también es una matriz diagonal.

49 **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \to tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \to tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$

Por tanto, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

50 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta y pon ejemplos.**

a) Si A es una matriz 2×2 cuyo rango es 2, su rango no varía si le añadimos una fila o una columna.

b) Si $X - AX = B$ entonces $X = (I - A)^{-1}B$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $(A + I)^2 = 6I$.

d) Si $AB = BA$ entonces $(AB)^t = (BA)^t$.

e) Si a una matriz de 3 filas y 3 columnas cuyo rango es 3 le quitamos una fila y una columna, entonces su rango será 2.

f) En una matriz antisimétrica ($A^t = -A$), los elementos de la diagonal principal son todos 0.

g) El rango de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$ es 3 si $k = 0$.

h) Si A es una matriz regular y $(B - C)A = 0$ (matriz nula), podemos asegurar que $B = C$.

a) Verdadero. No varía, puesto que la matriz que obtenemos tiene, como máximo, dos filas o dos columnas, luego su rango no puede ser mayor que dos. Por otra parte, como la nueva matriz contiene a A, el rango tiene que ser ≥ 2, es decir, el rango de la nueva matriz es 2.

b) Verdadero. $X - AX = B \to (I - A)X = B$. Multiplicando por $(I - A)^{-1}$ a la izquierda, tenemos la expresión final para calcular X.

c) Verdadero. $(A + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$

d) Verdadero. $AB = BA$. Como las dos matrices, AB y BA, son la misma, su traspuesta también será igual.

e) Falso. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3. Si quitamos la última fila y la última columna, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1.

f) Verdadero, porque $a_{ii} = -a_{ii} \to 2a_{ii} = 0 \to a_{ii} = 0$.

g) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-4\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-5\cdot(1.^a)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & k^2-21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-6 \end{pmatrix}$$

La afirmación es falsa, pues para que $ran(M) = 3$, debe ser $k \neq \pm\sqrt{6}$.

h) Verdadero. Como A es regular, podemos multiplicar por A^{-1} a la derecha:

$(B-C)AA^{-1} = \mathbf{0}A^{-1} \rightarrow B - C = \mathbf{0} \rightarrow B = C$

Para profundizar

51 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.**

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, pero $B \neq C$.

b) Debe existir A^{-1}.

52 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$AB + BA = \mathbf{0} \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \rightarrow B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \rightarrow BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-2c & -3b-2d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+4b & -2a+3b \\ -3c+4d & -2c+3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a+4b-2c & -2a-2d \\ 4a+4d & 4b-2c+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a+4b-2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b-2c+6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a-2b+c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \rightarrow 3a-2b+c = 0 \rightarrow c = -3a+2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a+2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Página 61

53 **Despeja la matriz X en la igualdad $(X+A)^2 = X^2 + XA + I_2$ y obtén X en el caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.**

$(X+A)^2 = X^2 + XA + I \rightarrow (X+A)(X+A) = X^2 + XA + I \rightarrow$

$\rightarrow X^2 + XA + AX + A^2 = X^2 + XA + I \rightarrow$

$\rightarrow AX + A^2 = I \rightarrow AX = I - A^2 \rightarrow X = A^{-1}(I - A^2)$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)+(1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)-(2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)/2]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

54 **Demuestra que si A es una matriz regular, al despejar X en la ecuación $XA^2 + BA = A^2$ se obtiene $X = I - BA^{-1}$.**

$XA^2 + BA = A^2 \rightarrow XA^2 - A^2 = -BA \rightarrow (X - I)A^2 = -BA$

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha (A^{-1} existe por ser A regular):

$(X - I)A = -B \rightarrow X - I = -BA^{-1} \rightarrow X = -BA^{-1} + I \rightarrow X = I - BA^{-1}$

55 **Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = A^t \rightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \rightarrow I = A \cdot A^t$

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

Buscamos matrices que verifiquen estas condiciones. Por ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $A^{-1} = A^t$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)-(2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)+(1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)-(2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^t$

56 **Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A es antisimétrica si $A^t = -A$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$$

A debe ser de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

57 **Una matriz cuadrada es *mágica de suma k* cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k. ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.**

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una *matriz antisimétrica*, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es *antisimétrica*, $k = 0$.
- Buscamos las matrices *mágicas antisimétricas de orden 3*: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

  Veamos cómo es una *matriz antisimétrica de orden 3*:

  $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

  A será *antisimétrica* si $A^t = -A$; es decir:

  $$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

  Luego, una matriz *antisimétrica de orden 3* es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

  Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que:

  $$\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b + c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}, \text{ es decir: } \begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$$

  Por tanto, las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

58 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.**

Una *matriz simétrica de orden 3* es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ (pues $A = A^t$).

Para que sea mágica con $k = 0$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e+f=0 \\ a+d+f=0 \\ 2c+d=0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \\ (5.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)+(2.^a) \\ (5.^a) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)+(3.^a) \\ (5.^a)-2\cdot(3.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)/2 \\ (5.^a)+(4.^a) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \to a=-b-c=-f \\ b+d+e=0 \to b=-e=f \\ c+e+f=0 \to c=0 \\ d+e+f=0 \to e=-f \\ 3d=0 \to d=0 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 0$,* es de la forma $A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}$, con $f \in \mathbb{R}$.

59 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.**

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

Para que sea *mágica* con $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=3 \\ b+d+e=3 \\ c+e+f=3 \\ a+d+f=3 \\ 2c+d=3 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \\ (5.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)+(2.^a) \\ (5.^a) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)+(3.^a) \\ (5.^a)-2\cdot(3.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)/2 \\ (5.^a)+(4.^a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=3 \to a=3-b-c=3-f-1=2-f \\ b+d+e=3 \to b=3-d-e=3-1-2+f=f \\ c+e+f=3 \to c=3-e-f=3-2+f-f=1 \\ d+e+f=3 \to e=3-d-f=3-1-f=2-f \\ 3d=3 \to d=1 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 3$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

60 **Sea A una matriz cuadrada que verifica la igualdad $A^2 - 2A = 3I$.**

a) Demuestra que A es invertible y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) Expresa A^3 como combinación lineal de A e I.

c) Halla todas las matrices simétricas de orden 2 que verifican $A^2 - 2A = 3I$.

a) $A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A - 2I) = 3I \rightarrow A \cdot \frac{1}{3}(A - 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$.

b) $A^2 = 3I + 2A$

$A^3 = (3I + 2A)A = 3A + 2A^2 = 3A + 2(3I + 2A) = 7A + 6I$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+b^2 & b(a+c-2) \\ b(a+c-2) & b^2+c^2-2c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 3 \\ b(a+c-2) = 0 \\ b^2 + c^2 - 2c = 3 \end{cases}$$

- Si $b = 0$, obtenemos $\begin{cases} a^2 - 2a = 3 \\ c^2 - 2c = 3 \end{cases}$ con las soluciones siguientes:

  $a = 3,\ b = 0,\ c = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad a = -1,\ b = 0,\ c = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

  $a = 3,\ b = 0,\ c = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad a = -1,\ b = 0,\ c = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Si $b \neq 0$, obtenemos el sistema $\begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 3 \\ b(a+c-2) = 0 \\ b^2 + c^2 - 2c = 3 \end{cases}$ con las soluciones:

  $a = 2 - c,\ b = \sqrt{-(c+1)(c-3)}$; $a = 2 - c,\ b = -\sqrt{-(c+1)(c-3)}$

  En estos casos, ha de ser $-1 \le c \le 3$, y las matrices que verifican la condición pedida son:

  $$A = \begin{pmatrix} 2-c & \sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ \sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2-c & -\sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ -\sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$$

61 **Estudia para qué valores de x, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta.**

$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \rightarrow -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$

Si $-A = A^{-1} \rightarrow A(-A) = I$

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-x^2 & 0 \\ 0 & 10-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 10 - x^2 = 1 \\ x = \pm 3 \end{array}$$

Autoevaluación

Página 61

1 Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \to (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \to (1.^a) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{matrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (a+1) \cdot (2.^a) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{pmatrix}$$

Si $a = 3 \to ran(A) = 2$

Si $a \neq 3 \to ran(A) = 3$

2 Si A es una matriz cuadrada de orden 3, C una matriz de dimensión 3×2 y D una matriz cuadrada de orden 2, ¿qué dimensión debe tener la matriz B para que la ecuación matricial $AB = CD$ tenga sentido?

$A_{(3 \times 3)} B_{(m \times n)} = C_{(3 \times 2)} D_{(2 \times 2)} = M_{(3 \times 2)}$

Luego B debe ser una matriz de dimensión 3×2.

3 Demuestra que si A es una matriz cuadrada de orden 2 entonces $(A^t)^2 = (A^2)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

Ambas matrices, $(A^2)^t$ y $(A^t)^2$ coinciden.

4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

5 **Determina todas las matrices A tales que $AX = XA$, siendo $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} a+b=a+c \\ a+b=b+d \\ c+d=a+c \\ c+d=b+d \end{array}\right\} \to a=d, \ b=c$

Son todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

6 **Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y tales que verifiquen las siguientes ecuaciones:**

$\boldsymbol{X + Y^{-1} = C}$

$\boldsymbol{X - Y^{-1} = C^t}$

$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$

- Sumamos las ecuaciones:

$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

- Restamos las ecuaciones:

$2Y^{-1} = C - C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to Y^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora calculamos la inversa de $Y^{-1} \to (Y^{-1})^{-1} = Y$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) + 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \end{array}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Luego $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7 **a) Halla la inversa de la siguiente matriz:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Resuelve la ecuación $2XA + B = A^t$, **siendo** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $2XA + B = A^t \rightarrow 2XA = A^t - B \rightarrow 2X = (A^t - B)A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(A^t - B)A^{-1}$

$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

8 **Razona si es posible añadir una fila a esta matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4:**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(M) = 2$

Si se añade una fila, puede tener, como máximo, rango 3, luego no es posible que la nueva matriz tenga rango 4.

9 **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**

$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2 % en el modelo M_1, el 5 % en el M_2, el 8 % en el M_3 y el 10 % en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$